Математичка гимназија у Београду
Додатна настава за први разред
18.12.2005.

Комбинаторика

Миливоје Лукић

Формула укључивања и искључивања Нека су A_1, A_2,..., A_n подскупови коначног скупа S. Тада важи

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Број решења једначине $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ у скупу ненегативних целих бројева је $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Број решења једначине $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ у скупу природних бројева је $\binom{n-1}{k-1}$.

1. (а) Тараба има 20 дасака. Сваку од њих треба обојити плавом, зеленом или жутом бојом, тако да суседне даске буду обојене различитим бојама. На колико начина то може да се уради?

   (б) Који је одговор ако се захтева да бар једна даска буде плава?

   (ц) Који је одговор ако се захтева да бар по једна даска буде плава, зелена и жута?

2. Одељење има 25 ученика. На колико начина је могуће међу њима изабрати

   (а) председника и благајника?

   (б) двојицу редара?

3. Колико има пермутација f скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да за свако $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи

$$f(j) \le j + 1?$$

4. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ које немају ниједну непокретну тачку?

5. Дата је квадратна таблица 50×50 попуњена бројевима 0, 1 и -1 тако да је збир елемената таблице по апсолутној вредности не већи од 100. Доказати да постоји подтаблица 25×25 (пресек 25 узастопних врста са 25 узастопних колона) тако да збир елемената у тој таблици по апсолутној вредности није већи од 25.

6. На колико начина се таблица $m \times n$ може попунити бројевима 1 и -1 тако да производ бројева у свакој врсти и колони буде -1?

7. У поља таблице $m \times n$ уписани су бројеви. У једном кораку дозвољено је променити знак свим бројевима у једној врсти или колони. Доказати да се применом ове операције може добити таблица таква да је збир бројева у свакој врсти и свакој колони ненегативан.

8. Нека су a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n позитивни бројеви такви да је $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Доказати да се у поља таблице $m \times n$ може записати $m + n - 1$ ненегативан број (а преостала поља попунити нулама) тако да је збир бројева у i-тој врсти a_i а збир бројева у j-тој колони b_j.

9. Колико има пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да је $a_i > a_{i+1}$ за тачно једну вредност i из скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$?

10. Међу 81 датих природних бројева, ниједан нема прост фактор већи од 5. Доказати да међу њима постоје 4 различита броја чији је производ четврти степен природног броја.

11. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таква да је пресек било која два елемента фамилије $\mathcal{F}$ непразан. Одредити максимални број елемената који може да има фамилија $\mathcal{F}$.

12. Међу тачкама 1, 2,..., $2n$ на бројевној правој њих n је обојено плавом, а преосталих n црвеном бојом. Нека су $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ тачке обојене плавом бојом, а $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ тачке обојене црвеном бојом. Доказати да збир

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$$

не зависи од бојења и израчунати га.

13. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ је Шпернерова фамилија скупа X ако и само ако, за било које $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$ ниједан од A, B није подскуп оног другог. Доказати да за сваку Шпернерову фамилију скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ важи

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

као и да постоји Шпернерова фамилија за коју у горњој неједнакости важи једнакост.

14. На полици се налази 12 књига. На колико начина се може одабрати 5 књига тако да никоје две од њих нису суседне?

15. На колико начина се може поређати у низ k нула и n јединица тако да никоје две јединице нису суседне?

16. За округлим столом се налази 12 људи. На колико начина се може одабрати 5 људи тако да међу њима нема суседа?

17. Колико има n-тоцифрених бројева (у декадном систему) чије су цифре у неопадајућем поретку?

18. (ИМО2001.4) Нека је n непаран цео број већи од 1 и нека су c_1, c_2, ..., c_n цели бројеви. За сваку пермутацију $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, дефинишимо

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i.$$

Доказати да постоје пермутације $a \neq b$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ такве да $n!$ дели $S(a) - S(b)$.